

半张量积低存储压缩感知方法研究

王金铭, 叶时平, 徐振宇, 陈超祥, 蒋燕君

(浙江树人大学信息科技学院, 浙江杭州 310015)

摘 要: 由于随机观测矩阵的随机性, 存在数据存储量大、内存占用率高、数据计算量大以及难以面向大规模实际应用等问题. 为此, 提出了一种可有效降低随机观测矩阵所占存储空间的半张量积压缩感知 (STP-CS) 方法. 利用该方法, 构建低维随机观测矩阵, 经奇异值分解 (SVD) 优化后对原始信号进行采样, 并利用拟合 0-范数的迭代重加权方法进行重构. 实验利用 2 维灰度图像进行测试, 并对重构图像的峰值信噪比, 结构相似度等指标进行了统计和比较. 实验结果表明, 本文所述的 STP-CS 方法在不改变随机观测矩阵数据类型的前提下, 可将观测矩阵减小至传统 CS 模型中观测矩阵所占内存空间的 1/256 (甚至更低), 同时仍保持很高的重构质量.

关键词: 压缩感知; 随机观测矩阵; 半张量积; 存储空间; 奇异值分解

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112 (2018)04-0797-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.04.005

Low Storage Space of Random Measurement Matrix for Compressed Sensing with Semi-tensor Product

WANG Jin-ming, YE Shi-ping, XU Zhen-yu, CHEN Chao-xiang, JIANG Yan-jun

(College of Information Science & Technology, Zhejiang Shuren University, Hangzhou, Zhejiang 310015, China)

Abstract: Random measurement matrix needs large storage space, huge memory requirements for reconstruction, and high computational cost, which are not suitable for large-scale applications. To reduce the storage space of random measurement matrix for compressed sensing (CS), a new sampling approach for CS with semi-tensor product (STP-CS) is proposed. The STP-CS approach generates a random matrix, where the row and column numbers of the matrix are smaller than that for conventional CS. Then we optimize the matrix by the singular value decomposition (SVD) approach, after sampling with the matrix, we estimate the solutions of the sparse vector with the smooth ℓ_0 -norm minimization algorithm. Numerical experiments were conducted using gray-scale images, the peak signal-to-noise ratio (PSNR) and the structural similarity index (SSIM) of the reconstruction images were compared with the random matrices with different dimensions. Comparisons were also conducted with other random measurement matrix and other low storage techniques. Numerical experiment results show that the STP-CS can effectively reduce the storage space of the random measurement matrix to 1/256 of that for conventional CS, while maintaining the reconstruction performance.

Key words: compressed sensing; random measurement matrix; semi-tensor product (STP); storage space; singular value decomposition (SVD)

1 引言

根据 Donoho, Candès, Tao 等^[1,2]提出的压缩感知 (Compressed Sensing, CS) 理论, 若一个高维原始信号 (或向量) 在某个变换域是稀疏的或者本身就是稀疏的, 则可用一个观测矩阵, 将高维信号进行线性投影, 得

到一个低维的投影向量. 若观测矩阵与变换域的稀疏化表示矩阵满足 RIP 条件, 则通过求解优化问题, 便可从低维投影向量中以较高的概率重构出高维原始信号. 文献[1,2]中曾指出: 独立同分布的高斯随机变量形成的观测矩阵与任意稀疏矩阵存在较强的不相干性, 压缩观测信号可较高概率进行精确恢复. 正是由于

收稿日期: 2017-03-29; 修回日期: 2017-09-04; 责任编辑: 李勇锋

基金项目: 浙江省自然科学基金 (No. LY14E070001); 浙江省公益技术应用研究计划 (No. 2015C33074, No. 2015C33083); 浙江省科技计划 (No. 2014C33058)

随机矩阵具备优良的不相干特性,目前的压缩感知研究过程中作为观测矩阵得到广泛使用.虽然利用随机观测矩阵的投影方法具有理论上的完美特性,然而在实际应用中,恰恰由于其随机性,使得随机观测矩阵(如 Gaussian, Bernoulli 等矩阵)无论在硬件实现上、存储消耗和重建算法构造上,都要占用大量的存储空间和内存空间,在实际应用中受到很大的限制,存在着实际应用的困难,无法适用于大规模应用等问题.

迄今,相关的研究人员提出了各种方法用于降低压缩感知过程中观测矩阵所占的存储空间.如文献[3~5]等提出的分块压缩感知法;文献[6~10]中提出的确定性矩阵作为一种替代随机观测矩阵方式也得到了相关研究人员的重视;文献[11,12]中利用张量积(Kronecker)原理,从已知的随机观测矩阵中选取一些正交基,然后采用张量积运算,得到所需大小的随机观测矩阵进行采样和重构.

同样针对降低压缩感知过程中随机观测矩阵所占存储空间及内存占用率高等问题,本文提出了一种基于半张量积的低存储化压缩感知方法.该方法利用现有的观测矩阵构造方法,生成一个低阶矩阵(如 $M/16 \times N/16$),并对其进行奇异值(Singular Value Decomposition, SVD)优化,利用优化后的低阶观测矩阵,结合半张量积乘法原理对原始信号进行采样,对采样信号利用拟合 l_0 -范数迭代重加权方法成功实现了对原始信号的重构.重构结果虽然没有进一步提升重构质量,但随机观测矩阵所占的存储空间却得到了成倍下降.

文中利用 2 维图像信号并结合拟合 l_0 -范数方法进行了重构验证和比较.实验结果表明,采用半张量积压缩感知方法,并对低阶观测矩阵进行奇异值优化后,其重构质量有明显的提升,且当观测矩阵大小减小至传统观测矩阵的 $1/256$ 时,其仍能保持很高的重构质量.

2 半张量积乘法

半张量积乘法(Semi-Tensor Product, STP)是一种由程代展提出的新型矩阵乘法^[13].它是介于传统矩阵乘法与张量积乘法之间的一种新运算,即当两个矩阵 A 和 B 满足 A 的列数($\text{Col}(A)$)和 B 的行数($\text{Row}(B)$)成倍数关系时,两者之间即可进行左半张量积乘.传统矩阵乘法的运算性质在半张量积乘法中同样适用,并且,半张量积保持了传统矩阵乘法的全部主要性质,所以说它是一种有力的数学工具,对于实现不同阶的高维矩阵数字信号处理提供了一个非常好的途径.

定义 1 设 $T \in \mathbb{R}^{1 \times np}$, $X \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ 且 $X = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T$. 将 T 分割成 p 个等长的块 T^1, T^2, \dots, T^p , 它们都是长度为 n 的行向量,则定义左半张量积为:

$$T \times X = \sum_{i=1}^p T^i x_i \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

式中,符号 \times 表示向量的左半张量积.

展开式(1),有:

$$T \times X = T^1 x_1 + T^2 x_2 + \dots + T^i x_i + \dots + T^p x_p$$

式中, T^i 是一个长度为 n 的行向量, x_i 仅为列向量 X 中的一个分量,则 $T^i x_i$ 所得仍是一个长度为 n 的行向量, $T \times X$ 所得同样为一个 n 维行向量,由此,实现了两个长度不等向量的乘.

定义 2 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$. 如果 n 是 p 的因子或者 p 是 n 的因子,则有

$$C = A \times B \quad (2)$$

称 C 是 A 和 B 的左半张量积. 式中 $C = (C^{ij}) = \text{Row}_i(A) \times \text{Col}_j(B)$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, q$.

对于定义 2, 设 n 是 p 的因子($p = nt$), $a_{ij} \in A$, $b_{ij} \in B$, 则展开式(2),

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pq} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B^{11} & \dots & B^{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ B^{n1} & \dots & B^{nq} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式中, B^{ij} ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, q$) 表示将矩阵 B 中的第 i 列分割成 n 块后的结果,且 B^{ij} 是一个长度为 t 的列向量. 从而利用定义 1, 上式便有如下形式:

$$C = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} B^{i1} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{1i} B^{iq} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi} B^{i1} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{mi} B^{iq} \end{bmatrix}$$

由此便实现了矩阵 A 和 B 的左半张量积运算.

注:1) 对于定义 2 所示的 M 和 N , 若 $n = p$, 则有 $M \times N = MN$, 即半张量积退化为传统矩阵积. 2) 两个矩阵的左半张量积的维数可以很容易的根据前一个矩阵的列数和后一个矩阵的行数的公因子消去来计算得到, 如:

$$\begin{aligned} F_{p \times qr} \times G_{r \times s} \times H_{qs \times l} \\ &= (F \times G)_{p \times qs} \times H_{qs \times l} \\ &= (F \times G \times H)_{pt \times l} \end{aligned} \quad (3)$$

性质 1 只要 \times 有定义, 即矩阵有合适的维数, 则 \times 满足结合律, 即:

$$(F \times G) \times H = F \times (G \times H) \quad (4)$$

性质 2 只要 \times 有定义, 便有:

$$(F \times G)^T = F^T \times G^T \quad (5)$$

3 半张量积压缩感知模型

本文所述的半张量积压缩感知(STP-CS)模型定义

如下:

$$\mathbf{y}_{M \times 1} = \Phi_{(M/t) \times (N/t)} \times \Psi_{N \times N} \times \theta_{N \times 1} \quad (6)$$

式中 Φ 表示观测矩阵,其矩阵大小为 $(M/t) \times (N/t)$, 式中 $(M/t, N/t, t) \in \mathbb{Z}^+$ 且 $t < M$; $\Psi_{N \times N}$ 为稀疏表示矩阵, $\theta_{N \times 1}$ 表示信号经稀疏化表示后的稀疏向量. 为后续表述方便,定义 $\Phi_{(M/t) \times (N/t)}$ 为 $\Phi(t)$.

当 $t=1$ 时,根据半张量积乘法原理,式(6)所示的 STP-CS 模型就退化为传统的压缩感知模型,即:

$$\mathbf{y}_{M \times 1} = \Phi_{M \times N} \cdot \Psi_{N \times N} \cdot \theta_{N \times 1} \quad (7)$$

此时,观测矩阵大小为 $M \times N$,其所需的存储空间并没有减少.

当 $t > 1$ 时,式(6)所示观测矩阵成倍减小,如 $t=2$, 观测矩阵大小为 $(M/2) \times (N/2)$,仅为式(7)所示矩阵的 $1/4$,如若 $t=4$ 时,观测矩阵大小降为 $1/16$. 对于实现一幅大小为 512×512 原始图像的采样和重构(设定采样率为 25%,每个数据采用单精度表示),则当 $t=1$ 时,观测矩阵需 256K 字节;当 $t=2$ 时,观测矩阵 $\Phi(2)$ 仅需 64K 字节的存储空间;而当 $t=16$ 时, $\Phi(16)$ 所需的存储空间仅为 1K 字节,大大降低了压缩感知随机观测矩阵的存储空间.

若原始信号 $\mathbf{x}_{N \times 1}$ 本身是 k -稀疏的,则 STP-CS 模型压缩采样过程可表示如下:

$$\mathbf{y}_{M \times 1} = \Phi(t) \times \mathbf{x}_{N \times 1} \quad (8)$$

展开式(8),有

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{1,1} & \varphi_{1,2} & \cdots & \varphi_{1,N/t} \\ \varphi_{2,1} & \varphi_{2,2} & \cdots & \varphi_{2,N/t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{M/t,1} & \varphi_{M/t,2} & \cdots & \varphi_{M/t,N/t} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad (9)$$

其中 $\varphi_{i,j} \in \Phi(t)$ ($i=1,2,\dots,M/t; j=1,2,\dots,N/t$).

利用式(1)~(4)所示的半张量积定义,式(9)有如下表示:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^{1,1} + \cdots + \xi^{1,j} + \cdots + \xi^{1,N/t} \\ \vdots \\ \xi^{i,1} + \cdots + \xi^{i,j} + \cdots + \xi^{i,N/t} \\ \vdots \\ \xi^{M/t,1} + \cdots + \xi^{M/t,j} + \cdots + \xi^{M/t,N/t} \end{pmatrix} \quad (10)$$

式中 $\xi^{i,j} = \varphi_{i,j} (x_{(j-1)t+1} \cdots x_j)^T$ (其中 $i=1,2,\dots,M/t; j=1,2,\dots,N/t$),且 $\xi^{i,j}$ 表示了一个 t 维的列向量. 任意行元素 $\xi^{i,1} + \cdots + \xi^{i,j} + \cdots + \xi^{i,N/t}$ 的和也是一个 t 维的列向量.

式(9)和(10)中可以看到,利用 STP-CS 模型对原始信号采样的过程中,并没有改变线性采样本质,即采样值同样是原始信号的线性组合来进行表示. 其主要的区别仅在于对于每一个观测值 y_i ,仅用了 N/t 个系数及未知量 \mathbf{x} 进行表示. 此外,对于第 i 个 t 维的列向

量,有如下形式:

$$\begin{pmatrix} y_{(i-1)t+1} \\ y_{(i-1)t+2} \\ \vdots \\ y_{it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{i,1}x_1 + \cdots + \varphi_{i,j}x_{(j-1)t+1} + \cdots + \varphi_{i,N/t}x_{(N/t-1)t+1} \\ \varphi_{i,1}x_2 + \cdots + \varphi_{i,j}x_{(j-1)t+2} + \cdots + \varphi_{i,N/t}x_{(N/t-1)t+2} \\ \vdots \\ \varphi_{i,1}x_t + \cdots + \varphi_{i,j}x_{(j-1)t+t} + \cdots + \varphi_{i,N/t}x_{(N/t-1)t+t} \end{pmatrix} \quad (11)$$

从式(11)可知,在相邻的 t 个观测值中(对于 t 个相邻观测值,定义 y_1, \dots, y_t 表示为第 1 组相邻的 t 个观测值, $y_{(i-1)t+1}, \dots, y_{it}$ 表示为第 i 组的 t 个相邻观测值,则对于 M 个观测值 \mathbf{y} ,可分为 M/t 组),所表示的系数都是相同的,即每一个观测值都是 \mathbf{x} 与 $(\varphi_{i,1}, \dots, \varphi_{i,N/t})$ 的线性组合.

以上描述充分说明了本文所述的 STP-CS 模型(当 $t > 1$ 时)可适用于传统压缩感知模型,且 STP-CS 模型没有改变采样过程中的线性本质. 但低阶随机观测矩阵与稀疏表示矩阵之间的相关性会有如何的变化,是否满足压缩感知理论中的 RIP 条件呢? 本文将利用低阶观测矩阵和稀疏表示矩阵之间的相关性进行分析,以阐述 STP-CS 模型的可重构性.

3.1 相关性

对于式(6),定义如式(12)所示的传感矩阵 $\mathbf{A}(t)$:

$$\mathbf{A}(t) = \Phi(t) \times \Psi_{N \times N} \quad (12)$$

其中 $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

根据自相关定义,有

$$\mu(\mathbf{A}(t)) \triangleq \max_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i, j \leq N}} \frac{|\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j|}{\|\mathbf{a}_i\|_2 \|\mathbf{a}_j\|_2} \quad (13)$$

其中 $\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j$ 表示传感矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 的列向量.

结合式(10),列向量 \mathbf{a}_j 有如下形式:

$$\mathbf{a}_j = (\boldsymbol{\eta}_{1,j} \boldsymbol{\eta}_{2,j} \cdots \boldsymbol{\eta}_{i,j} \cdots \boldsymbol{\eta}_{M/t,j})^T$$

其中 $\boldsymbol{\eta}_{i,j} = \sum_{p=1}^{N/t} \varphi_{i,p} (\psi_{(p-1)t+1,j}, \dots, \psi_{pt,j})^T$, $\psi_{i,j} \in \Psi_{N \times N}$ 且满足 $j_1 \neq j_2$ 时,有 $\sum_{i=1}^N \psi_{i,j_1} \psi_{i,j_2} = 0$.

根据自相关性的定义,考察 $\mathbf{A}(t)$ 中任意不相同的两列 \mathbf{a}_{j_1} 和 \mathbf{a}_{j_2} ,可得:

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}_{j_1}^T \times \mathbf{a}_{j_2} \\ &= \boldsymbol{\eta}_{1,j_1}^T \boldsymbol{\eta}_{1,j_2} + \boldsymbol{\eta}_{2,j_1}^T \boldsymbol{\eta}_{2,j_2} + \cdots + \boldsymbol{\eta}_{i,j_1}^T \boldsymbol{\eta}_{i,j_2} + \cdots + \boldsymbol{\eta}_{M/t,j_1}^T \boldsymbol{\eta}_{M/t,j_2} \\ &= \sum_{i=1}^{M/t} \sum_{p_1=1}^{N/t} \sum_{p_2=1}^{N/t} \varphi_{i,p_1} \begin{pmatrix} \psi_{(p_1-1)t+1,j_1} \\ \vdots \\ \psi_{p_1,t,j_1} \end{pmatrix}^T \varphi_{i,p_2} \begin{pmatrix} \psi_{(p_2-1)t+1,j_2} \\ \vdots \\ \psi_{p_2,t,j_2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

整理式(14),有

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{j1}^T \times \mathbf{a}_{j2} &= \sum_{p_1=1}^{\frac{N}{t}} \sum_{p_2=1}^{\frac{N}{t}} \left(\sum_{i=1}^{\frac{M}{t}} \varphi_{i,p_1} \varphi_{i,p_2} \right) \begin{pmatrix} \psi_{(p_1-1)t+1,j1} \\ \vdots \\ \psi_{p_1t,j1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \psi_{(p_2-1)t+1,j2} \\ \vdots \\ \psi_{p_2t,j2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

对于现有的观测矩阵,如高斯矩阵,伯努利矩阵,确定性矩阵等等,均在一定程度上满足独立分布性、不相关性或正交性,能较好地满足压缩感知理论的 RIP 特性要求. 本文所采用的低阶观测矩阵 $\Phi(t)$,完全是依照 RIP 特性要求构建的,仅改变了矩阵的大小,并不改变矩阵的任何特性,则对 $\varphi_{i,j} \in \Phi_{(M/t) \times (N/t)}$,当 $p_1 \neq p_2$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{\frac{M}{t}} \varphi_{i,p_1} \varphi_{i,p_2} \rightarrow 0.$$

从而,对式(15),当 $p_1 \neq p_2$ 时,有

$$\mathbf{a}_{j1}^T \times \mathbf{a}_{j2} = \sum_{p_1=1}^{\frac{N}{t}} \sum_{p_2=1}^{\frac{N}{t}} \left(\sum_{i=1}^{\frac{M}{t}} \varphi_{i,p_1} \varphi_{i,p_2} \right) \begin{pmatrix} \psi_{(p_1-1)t+1,j1} \\ \vdots \\ \psi_{p_1t,j1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \psi_{(p_2-1)t+1,j2} \\ \vdots \\ \psi_{p_2t,j2} \end{pmatrix} \rightarrow 0$$

当 $p_1 = p_2$ 时,有

$$\mathbf{a}_{j1}^T \times \mathbf{a}_{j2} = \sum_{i=1}^{\frac{M}{t}} \sum_{p=1}^{\frac{N}{t}} \varphi_{i,p}^2 \begin{pmatrix} \psi_{(p-1)t+1,j1} \\ \vdots \\ \psi_{pt,j1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \psi_{(p-1)t+1,j2} \\ \vdots \\ \psi_{pt,j2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

对于一个选定的观测矩阵,有

$$c = \max(\varphi_{i,p}^2), (i = 1, 2, \dots, M/t)$$

且 $c > 0$,则有

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{j1}^T \times \mathbf{a}_{j2} &= \sum_{i=1}^{\frac{M}{t}} \sum_{p=1}^{\frac{N}{t}} \varphi_{i,p}^2 \begin{pmatrix} \psi_{(p-1)t+1,j1} \\ \vdots \\ \psi_{pt,j1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \psi_{(p-1)t+1,j2} \\ \vdots \\ \psi_{pt,j2} \end{pmatrix} \\ &< \sum_{i=1}^{\frac{M}{t}} c \sum_{p=1}^{\frac{N}{t}} \begin{pmatrix} \psi_{(p-1)t+1,j1} \\ \vdots \\ \psi_{pt,j1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \psi_{(p-1)t+1,j2} \\ \vdots \\ \psi_{pt,j2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

而式(17)中关于 ψ 项,有

$$\begin{aligned} &\sum_{p=1}^{\frac{N}{t}} \begin{pmatrix} \psi_{(p-1)t+1,j1} \\ \vdots \\ \psi_{pt,j1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \psi_{(p-1)t+1,j2} \\ \vdots \\ \psi_{pt,j2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \psi_{1,j1} \\ \vdots \\ \psi_{t,j1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \psi_{1,j2} \\ \vdots \\ \psi_{t,j2} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \psi_{(p-1)t+1,j1} \\ \vdots \\ \psi_{pt,j1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \psi_{(p-1)t+1,j2} \\ \vdots \\ \psi_{pt,j2} \end{pmatrix} + \dots \\ &+ \begin{pmatrix} \psi_{(\frac{N}{t}-1)t+1,j1} \\ \vdots \\ \psi_{N,j1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \psi_{(\frac{N}{t}-1)t+1,j2} \\ \vdots \\ \psi_{N,j2} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \psi_{i,j1} \psi_{i,j2} = 0 \end{aligned}$$

从而,对于式(17),有

$$\mathbf{a}_{j1}^T \times \mathbf{a}_{j2} = \sum_{i=1}^{\frac{M}{t}} \sum_{p=1}^{\frac{N}{t}} \varphi_{i,p}^2 \begin{pmatrix} \psi_{(p-1)t+1,j1} \\ \vdots \\ \psi_{pt,j1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \psi_{(p-1)t+1,j2} \\ \vdots \\ \psi_{pt,j2} \end{pmatrix} \rightarrow 0$$

由此,对于大小为 $(M/t) \times (N/t)$,且较好满足 RIP 特性的观测矩阵,能够满足与稀疏表示矩阵之间的低相关性要求. 这充分说明本文所述 STP-CS 模型,能够实现原始信号的采样和精确重构.

3.2 计算复杂度

对于一个长度为 N 的稀疏向量 $\mathbf{x}_{N \times 1}$,稀疏度为 k ,采样数 $M \geq ck \log N$,其中 c 为常数,若利用大小为 $M \times N$ 的观测矩阵对其进行采样,需要进行 MN 次乘法运算和 $M(N-1)$ 次的加法运算,其相应的重构计算复杂度达到了 $O(N^3)$;而采用大小为 $(M/t) \times (N/t)$ 的观测矩阵对 $\mathbf{x}_{N \times 1}$ 进行采样,仅需 $(M/t)(N/t)$ 次的乘法运算和 $(M/t)(N/t-1)$ 次的加法运算,其重构的计算复杂度仅为 $O((N/t)^3)$.

由于观测矩阵在压缩感知的采样及重构过程中的关键角色,其矩阵大小是影响数据存储量及计算复杂度的关键因素,从而减小观测矩阵的大小有益于降低数据的存储空间和计算复杂度. 为此,本文所述的半张量压缩感知模型能够有效降低观测矩阵所需的存储空间,同时也有益于降低重构的计算复杂度.

3.3 重构算法

对于式(6)所示的 STP-CS 模型,可采用迭代重加权(IRLS)^[14-16]方法进行重构. 令观测矩阵 $\Phi(t)$ ($t > 1$) 是行满秩矩阵,即 $\text{rank}(\Phi(t)) = M/t$. 根据迭代重加权原理,式(6)线性系统 l_0 -范数解可表示为:

$$\begin{aligned} \theta^{(n+1)} &= \mathbf{D}_n \times (\Phi(t) \times \Psi)^T \\ &\times [\Phi(t) \times \Psi \times \mathbf{D}_n \times (\Phi(t) \times \Psi)^T] \times y \end{aligned} \quad (18)$$

式中 $\theta^{(n+1)}$ 表示经 $(n+1)$ 次迭代后得到的稀疏向量, \mathbf{D}_n 为 $N \times N$ 的对角矩阵,且第 i 个对角分量为 $1/w_i^{(n)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$).

借鉴文献[16]中定义的光滑高斯函数 $f(\theta, \sigma)$ $= \sum_{i=1}^N \exp(-\theta_i^2/2\sigma^2)$, 对角矩阵 \mathbf{D}_n 中的权重有如下表示:

$$w_i^{(n)} = \exp(-(\theta_i^{(n)})^2/2\sigma_n^2) \quad (19)$$

式中 $i = 1, 2, \dots, N$, $w_i^{(n)}$ 表示经 n 次迭代后得到的权重向量中的第 i 个值, σ_n 是一个正实数,且在迭代过程中满足 $\sigma_{n+1} = \rho \sigma_n$ ($0 < \rho < 1$). 当进行迭代重构时,令 $w^0 = (1, \dots, 1)_{1 \times N}$, $\theta^0 = (1, \dots, 1)_{1 \times N}$, $\sigma_0 = 1$, 经迭代后,便可得到相应的稀疏解 $\hat{\theta}_{N \times 1}$.

为使低阶观测矩阵具备更优的 RIP 性质,提升低阶

观测矩阵 $\Phi(t)$ ($t > 1$) 的重构性能,本文使用奇异值分解(SVD)^[17]方法对 $\Phi(t)$ ($t > 1$) 进行优化,对 $\Phi(t)$ 进行 SVD 分解,有

$$\Phi(t) = USV^T \quad (20)$$

其中 $U \in \mathbb{R}^{(M/t) \times (M/t)}$, $S \in \mathbb{R}^{(M/t) \times (N/t)}$, $V \in \mathbb{R}^{(N/t) \times (N/t)}$.

计算 S 中的 (M/t) 个奇异值的平均值,并利用该平均值替换 S 中的所有奇异值,得到新的 S' ,并得到新的观测矩阵

$$\Phi(t) = US'V^T \quad (21)$$

从而,新观测矩阵的最小奇异值得到增大,矩阵列向量间的线性独立性得到增强,仿真实验将表明新矩阵在信号重构质量上也得到提升.

4 实验结果与分析

为验证经 STP-CS 模型采样后所得信号的重构性能,实验利用 2 维灰度图像进行了采样和重构,它们分别为 256×256 的 Lena、Peppers,以及 512×512 的 Mandrill 和 DICOM 医学灰度图像 OT-colon (OT-colon 从文献[18]得到). 实验构建满足 $N(0, 1/(M/t))$ 高斯独立分布的随机观测矩阵,其大小为 $(M/t) \times (N/t)$ (其中 $t = 1, 2, 4, 8$, 或 16),并将其进行 SVD 优化. 此外,文献[16]曾指出采用拟合高斯光滑函数来近似时, ρ 的取值越大,稀疏解正确重构的概率越高,故选取 $\rho = 0.8$. 实验平台配备了 Intel i7-4600 CPU, 2.1 GHz 主频, 8GB 内存, 64 位 Windows 8 操作系统, 仿真软件采用 Matlab R2010b.

针对 2 维灰度图像,设计了三组实验进行了验证和比较. 第 1 组设定不同的采样率,分别利用经 SVD 优化的高斯随机观测矩阵 (t 分别取 1, 2, 4, 8 和 16) 进行采样和重构,并比较重构图像的峰值信噪比 (PSNR) 和结构相似性 (structural similarity index, SSIM)^[19]. 第 2 组同样设定不同的采样率,利用不同大小的 Bernoulli、部分 Hadamard、Toeplitz 等观测矩阵进行采样和重构,比较重构图像的 PSNR 值和 SSIM 值. 第 3 组设定不同的采样率,与文献[4]和[11]中所述的低存储压缩感知方法进行了比较.

实验时,首先对 2 维原始图像进行小波变换,得到小波系数;根据设定采样率,利用本文所述 STP-CS 模型及优化后的高斯矩阵分别采样,得到相应采样信号 $y_1, y_2, y_4, y_8, y_{16}$ (分别对应 $\Phi(1), \Phi(2), \Phi(4), \Phi(8)$ 及 $\Phi(16)$),并利用本文所述的拟合 l_0 -范数方法,进行重构,得到重构的小波系数;最后利用小波逆变换,得到重构图像. 第 1 组实验,设定采样率分别为 $M/N = 0.75, 0.5, 0.4375$ 以及 0.375 , 构建高斯随机观测矩阵,降阶比分别取 $t = 1, 2, 4, 8$ 以及 16 , 并满足 $(M/t, N/t) \in \mathbb{Z}^+$. 表 1 列出了不同采样率及不同降阶比情形时,我们构建

的高斯随机观测矩阵的大小,其中原始图形是大小为 256×256 的 Lena 和 Peppers. 若采样及重构对象为 512×512 的 Mandrill 和 OT-colon,则可以类似得到对应降阶比及采样率的观测矩阵. 表 1 中,我们可以看到,针对任一采样率,随着 t 的增大,观测矩阵大小呈 t^2 倍的趋势减小,当 $t = 16$ 时,高斯随机观测矩阵 $\Phi(16)$ 的大小为 $\Phi(1)$ 的 $1/256$. 在固定数据格式及精度时, $\Phi(16)$ 为 $\Phi(1)$ 所需存储空间 $1/256$, 大大降低了随机观测矩阵所需存储空间以及重构过程中的内存占用率.

表 1 半张量积压缩感知模型的高斯随机观测矩阵 (256×256 , Lena, Peppers)

| M/N | $t = 1$ | $t = 2$ | $t = 4$ | $t = 8$ | $t = 16$ |
|--------|-------------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 0.7500 | $\Phi_{192 \times 256}$ | $\Phi_{96 \times 128}$ | $\Phi_{48 \times 64}$ | $\Phi_{24 \times 32}$ | $\Phi_{12 \times 16}$ |
| 0.5000 | $\Phi_{128 \times 256}$ | $\Phi_{64 \times 128}$ | $\Phi_{32 \times 64}$ | $\Phi_{16 \times 32}$ | $\Phi_{8 \times 16}$ |
| 0.4375 | $\Phi_{112 \times 256}$ | $\Phi_{56 \times 128}$ | $\Phi_{28 \times 64}$ | $\Phi_{14 \times 32}$ | $\Phi_{7 \times 16}$ |
| 0.3750 | $\Phi_{96 \times 256}$ | $\Phi_{48 \times 128}$ | $\Phi_{24 \times 64}$ | $\Phi_{12 \times 32}$ | $\Phi_{6 \times 16}$ |

实验针对 4 幅灰度图像分别进行了 50 次采样和重构,分别观察其重构图像及统计重构图像的 PSNR 值和 SSIM 值. 图 1 ~ 2 列出了采样率为 0.5 时 Peppers 和 Mandrill 的重构图像,其重构图像为 50 次重构尝试中随机选取的.

图 1 ~ 2 的 (b) ~ (f) 中可以直观地看到,采用经 SVD 优化后的低阶高斯随机观测矩阵对信号进行采样,从视觉角度来看,各重构图像之间并没有明显的差别,特别当 $t = 16$ 时仍保持了很高的重构质量,此时观测矩阵已经减小为 $1/256$. 该结果表明:利用本文所述 STP-CS 模型,可以利用低阶观测矩阵对 2 维图像信号进行采样,并可以实现对原始信号的重构,且保持了较高的重构质量.

为进一步评价 $t = 2, 4, 8$ 和 16 时的重构质量,对每次采样和重构后的 PSNR 和 SSIM 值进行统计,其 50 次采样重构图像 PSNR 和 SSIM 值的平均值如表 2 所示.

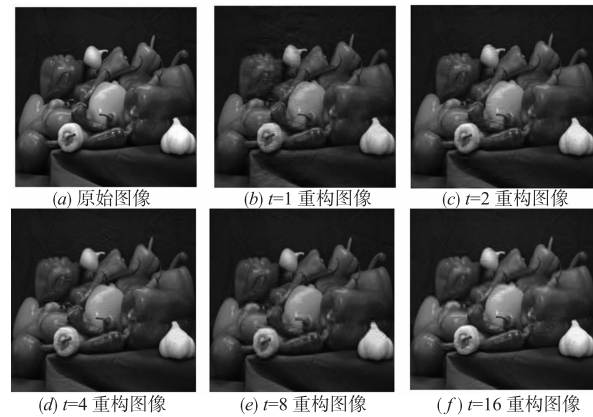


图 1 不同维数观测矩阵重构二维图像比较 (Peppers, $M=128, N=256$)

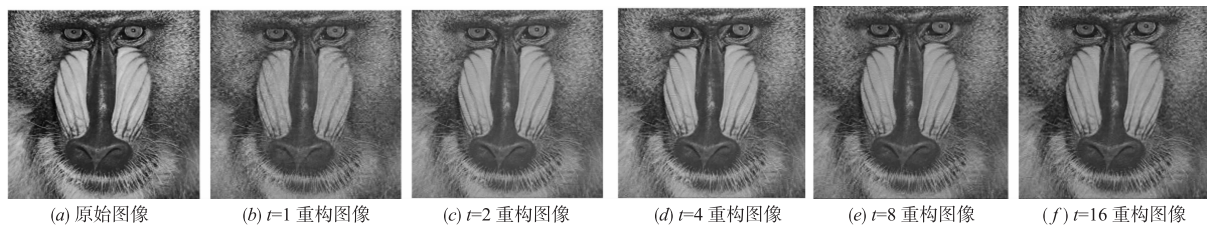
图2 不同维数观测矩阵重构二维图像比较(Mandrill, $M=256$, $N=512$)

表2 不同大小高斯随机观测矩阵采样重构2维灰度图像的 PSNR 和 SSIM 值

| | 降维比例 | M/N | Lena | | Peppers | | Mandrill | | OT-colon | |
|-----|--------|--------|----------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|
| | | | PSNR | (SSIM) | PSNR | (SSIM) | PSNR | (SSIM) | PSNR | (SSIM) |
| 平均值 | $t=1$ | 0.7500 | 40.190 6 | (0.958 5) | 44.047 7 | (0.970 3) | 28.435 9 | (0.872 1) | 39.662 4 | (0.933 3) |
| | $t=2$ | | 40.011 0 | (0.954 9) | 44.138 8 | (0.968 5) | 28.439 9 | (0.877 1) | 39.572 3 | (0.932 8) |
| | $t=4$ | | 39.719 7 | (0.952 2) | 43.399 6 | (0.963 2) | 28.449 7 | (0.862 5) | 39.358 1 | (0.930 3) |
| | $t=8$ | | 39.587 6 | (0.954 0) | 42.432 4 | (0.963 6) | 28.080 2 | (0.867 3) | 38.974 1 | (0.926 8) |
| | $t=16$ | | 38.782 9 | (0.947 4) | 42.154 1 | (0.958 5) | 28.723 6 | (0.899 8) | 38.487 4 | (0.927 5) |
| | $t=1$ | 0.5000 | 34.251 2 | (0.897 0) | 36.030 1 | (0.898 1) | 23.678 5 | (0.690 8) | 33.115 9 | (0.824 9) |
| | $t=2$ | | 34.134 4 | (0.886 0) | 35.468 6 | (0.878 3) | 23.480 3 | (0.682 1) | 33.058 5 | (0.821 7) |
| | $t=4$ | | 33.737 4 | (0.883 1) | 35.082 8 | (0.876 5) | 23.368 4 | (0.671 6) | 32.792 1 | (0.815 1) |
| | $t=8$ | | 33.143 8 | (0.867 2) | 34.655 0 | (0.868 0) | 23.741 2 | (0.694 5) | 32.472 5 | (0.820 7) |
| | $t=16$ | | 33.219 9 | (0.876 8) | 34.286 5 | (0.872 3) | 23.463 0 | (0.676 4) | 32.123 9 | (0.818 8) |
| | $t=1$ | 0.4375 | 32.524 5 | (0.854 0) | 33.820 9 | (0.845 7) | 22.551 8 | (0.626 5) | 31.628 0 | (0.788 7) |
| | $t=2$ | | 32.024 3 | (0.826 4) | 33.219 0 | (0.815 1) | 22.373 1 | (0.612 9) | 31.274 7 | (0.775 6) |
| | $t=4$ | | 32.164 5 | (0.840 5) | 33.044 2 | (0.814 4) | 22.136 8 | (0.594 4) | 31.760 0 | (0.788 0) |
| | $t=8$ | | 31.767 8 | (0.833 6) | 32.818 5 | (0.822 5) | 22.378 0 | (0.611 8) | 30.607 2 | (0.776 3) |
| | $t=16$ | | 31.731 2 | (0.832 1) | 32.339 8 | (0.811 9) | 22.733 1 | (0.633 4) | 30.569 9 | (0.775 7) |
| | $t=1$ | 0.375 | 30.510 0 | (0.794 0) | 31.772 2 | (0.781 0) | 21.575 8 | (0.557 3) | 29.464 0 | (0.723 5) |
| | $t=2$ | | 29.766 9 | (0.756 9) | 30.753 5 | (0.732 2) | 21.522 0 | (0.555 3) | 29.587 1 | (0.727 6) |
| | $t=4$ | | 30.170 4 | (0.782 7) | 31.875 1 | (0.794 4) | 21.084 6 | (0.512 3) | 28.608 2 | (0.686 0) |
| | $t=8$ | | 29.362 3 | (0.753 9) | 30.965 6 | (0.756 8) | 21.447 7 | (0.541 9) | 28.597 7 | (0.723 1) |
| | $t=16$ | | 30.050 6 | (0.773 3) | 30.896 9 | (0.752 3) | 21.867 3 | (0.572 4) | 28.901 2 | (0.701 7) |

对于表2数据所示,4幅原始图像在不同采样率情形,随着降阶比 t 增大,重构图像的PSNR和SSIM值基本与 $t=1$ 时一致(如前所述,当 $t=1$ 时,采样模型即为传统压缩采样模型,故对降阶采样的重构质量进行比较时,主要与 $t=1$ 的重构结果进行比较),甚至 $t=16$ 时,其重构质量基本仍与 $t=1$ 时保持了同一水平.这充分印证了可以利用低阶高斯观测矩阵实现对原始信号采样,并进行精确重构.

在第2组实验中,我们采用低阶Bernoulli、部分Hadamard、Toeplitz等SVD优化后的随机矩阵对Lena进行了50次采样和重构,计算重构图像的PSNR平均值,结果如表3所示.

根据表3结果,采用其他类型的低阶观测矩阵对原始图像进行采样,并利用本文所述方法进行重构,其重构图像的PSNR值仍具备很高的重构质量,这充分说明本文所述方法同样适用于其他类型的随机观测矩阵.

为进一步验证及比较本文所述方法的重构性能,我们进行了第3组实验.对比实验主要与文献[4]所示的光滑0-范数分块压缩感知方法和文献[11]中所述Kronecker压缩感知方法进行了比较.其中分块方法进行压缩采样时将图像分成 16×16 大小的若干块,Kronecker方法中采用两个矩阵进行张量积运算得到对应的观测矩阵.对比实验均采用SVD优化后的高斯随机

观测矩阵,设定的采样率为 $M/N = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$ 及 0.8 . 对 Peppers 图像的小波系数分别进行 50 次采样和重构,取 PSNR 的平均值. 实验中,利用本文所述方法,令 $t = 2, 4, 8$ 和 16 ,根据设定的采样率构建低阶高斯随机观测矩阵对原始信号进行采样和重构. 对比实验中,均采用拟合 l_0 -范数的迭代重加权方法进行重构,结果如表 4 所示.

表 3 其他观测矩阵重构 2 维图像性能比较

| Image | M/N | 降维比例 | Bernoulli | Hadamard | Toeplitz |
|-------|--------|----------|-----------|----------|----------|
| | | | PSNR | PSNR | PSNR |
| Lena | 0.7500 | $t = 1$ | 40.548 4 | 40.722 9 | 40.184 6 |
| | | $t = 2$ | 40.167 7 | 40.600 5 | 40.377 4 |
| | | $t = 4$ | 39.654 2 | 40.405 7 | 40.134 4 |
| | | $t = 8$ | 39.889 0 | 39.848 9 | 39.911 2 |
| | | $t = 16$ | 39.786 2 | 39.938 5 | 39.036 4 |
| | 0.5000 | $t = 1$ | 34.312 3 | 34.507 8 | 34.587 3 |
| | | $t = 2$ | 34.215 3 | 34.199 2 | 34.473 3 |
| | | $t = 4$ | 33.758 6 | 34.107 7 | 34.341 5 |
| | | $t = 8$ | 33.718 5 | 33.636 0 | 34.237 7 |
| | | $t = 16$ | 33.895 2 | 33.502 2 | 33.710 3 |
| | 0.4375 | $t = 1$ | 32.700 7 | 32.907 6 | 32.849 5 |
| | | $t = 2$ | 32.993 4 | 32.874 0 | 32.374 5 |
| | | $t = 4$ | 32.023 0 | 32.605 1 | 32.156 2 |
| | | $t = 8$ | 32.614 7 | 31.860 6 | 32.025 6 |
| | | $t = 16$ | 32.766 1 | 31.007 1 | 31.750 8 |
| | 0.3750 | $t = 1$ | 30.289 3 | 31.353 0 | 30.820 1 |
| | | $t = 2$ | 30.062 4 | 30.964 1 | 30.003 1 |
| | | $t = 4$ | 30.234 3 | 30.707 4 | 30.150 7 |
| | | $t = 8$ | 30.143 0 | 30.136 4 | 29.904 8 |
| | | $t = 16$ | 29.965 0 | 29.742 8 | 29.792 9 |

表 4 与其他低存储压缩感知方法比较 (Peppers)

| 采样方法 | 对应采样率重构图像的 PSNR | | | | | |
|-------------|-----------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 |
| 本文 $t = 2$ | 30.7535 | 33.4171 | 35.4686 | 38.1406 | 41.2539 | 45.4670 |
| 本文 $t = 4$ | 31.8751 | 33.2838 | 35.0828 | 38.1196 | 41.4350 | 45.6907 |
| 本文 $t = 8$ | 30.9656 | 32.7256 | 34.6550 | 37.2002 | 41.1512 | 44.0333 |
| 本文 $t = 16$ | 30.8969 | 32.7343 | 34.2865 | 37.7035 | 39.3064 | 43.9676 |
| 文献[4] | 29.6091 | 33.5935 | 35.4700 | 37.4206 | 39.9815 | 43.7274 |
| 文献[11] | 29.3258 | 32.2485 | 34.0892 | 36.4385 | 39.9208 | 44.3371 |

根据表 4 所示,对于相同的采样率,当采用不同大小的高斯观测矩阵,本文所述方法所得重构图像的 PSNR 值均明显高于文献[11]所述 Kronecker 压缩感知

方法所得结果. 相比文献[4]所示方法,其相应重构图像的 PSNR 值均能接近或超过文献[4]方法所得结果. 从整体上看,本文所述 STP-CS 模型能很好地实现降低随机观测矩阵所需存储空间,且能保持较高的重构质量.

5 结论

基于半张量积的低维观测采样及重构的压缩感知 (STP-CS) 模型是一种可以有效降低随机观测矩阵所占存储空间、内存空间的方法. 文中根据原始信号长度、采样率及设定的观测矩阵大小,构建高斯矩阵、Bernoulli、部分 Hadamard、Toeplitz 等观测矩阵,经 SVD 优化后对 2 维灰度图像的小波系数进行采样,并利用拟合 l_0 -范数的迭代重加权方法进行了重构. 实验针对重构灰度图像的 PSNR 和 SSIM 值进行了统计和比较,实验结果表明,采用本文所述的 STP-CS 模型,可以利用低阶观测矩阵对原始信号进行采样并精确重构,可以有效降低观测矩阵所需的存储空间.

但随着研究的深入,STP-CS 模型还有一些问题亟待深入研究,一是重构质量的稳定性,虽然采用本文所述的优化及重构方法可以得到较高的重构质量,但随着观测矩阵的减小,同时由于随机观测矩阵的随机特性,其生成的观测矩阵在不相干性 (RIP) 上有一定的变动,使得重构质量的稳定性并不能得到有效提升;二是重构质量的提升,本文提出的重构方法在观测矩阵较小时虽然获得了较高的重构质量,但整体上还有较大的提升空间,后续将继续探寻能有效提升重构质量的方法,以期进一步提升重构质量;三是重构的实时性,虽然采用本文所述降维采样方法可以有效降低观测矩阵所占的存储空间,同时可降低内存占用率及数据计算量,但由于迭代重加权方法的天然特性,使得目前 STP-CS 模型的重构实时性还有待进一步提升,这也促使我们需要探寻其他的重构方法以提升重构的实时性指标.

总的来说,虽然针对 STP-CS 模型所提出的重构方法并没有有效提升压缩感知的重构质量,但对于降低观测矩阵带来的存储压力却是有非常积极的意义,特别是针对存储空间有限的嵌入式应用.

参考文献

- [1] Donoho D L. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289 - 1306.
- [2] Candès E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489 - 509.

- [3] Bigot J, Boyer C, Weiss P. An analysis of block sampling strategies in compressed sensing [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2016, 62(4): 2125–2139.
- [4] 王宏志, 王贤龙, 周婷婷. 基于光滑 L0 范数的图像分块压缩感知恢复算法[J]. *吉林大学学报: 工学版*, 2015, 45(1): 322–327.
WANG Hong-zhi, WANG Xian-Long, ZHOU Ting-Ting. Image block compressive sensing reconstruction based on smooth L0 norm [J]. *Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)*, 2015, 45(1): 322–327. (in Chinese)
- [5] 王文东, 王尧, 王建军. 基于迭代重赋权最小二乘算法的块稀疏压缩感知[J]. *电子学报*, 2015, 43(5): 922–928.
WANG Wen-Dong, WANG Yao, WANG Jian-Jun. Iterative reweighted least squares algorithm for block-sparse compressed sensing [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2015, 43(5): 922–928. (in Chinese)
- [6] Zhang J, Han G, Fang Y. Deterministic construction of compressed sensing matrices from protograph LDPC codes [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(11): 1960–1964.
- [7] 党骥, 马林华, 田雨, 等. 基于 m 序列的压缩感知测量矩阵构造[J]. *西安电子科技大学学报*, 2015, 42(2): 186–192.
DANG Kui, MA Lin-Hua, TIAN Yu, et al. Construction of the compressive sensing measurement matrix based on m sequences [J]. *Journal of Xidian University*, 2015, 42(2): 186–192. (in Chinese)
- [8] 朱志臻, 周崇彬, 刘发林, 李滨兵, 张志达. 用于压缩感知的二值化测量矩阵[J]. *微波学报*, 2014, 30(2): 79–83.
ZHU Zhi-Zhen, ZHOU Chong-Bin, LIU Fa-Lin, Li Bin-Bing, Zhang Zhi-DA. Binarized measurement matrix for compressive sensing [J]. *Journal of Microwaves*, 2014, 30(2): 79–83. (in Chinese)
- [9] Ravelomanantsoa A, Rabah H, Rouane A. Compressed sensing: a simple deterministic measurement matrix and a fast recovery algorithm [J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2015, 64(12): 3405–3413.
- [10] YUAN H Y, SONG H Y, SUN X, et al. Compressive sensing measurement matrix construction based on improved size compatible array LDPC code [J]. *Image Processing IET*, 2015, 9(11): 993–1001.
- [11] ZHANG B J, TONG X, WANG W, et al. The research of Kronecker product-based measurement matrix of compressive sensing [J]. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, 2013, 2013(1): 1–5.
- [12] M F Duarte, R G Baraniuk. Kronecker compressive sensing [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2012, 21(2): 494–504.
- [13] CHEN D Z, QI H S, LI Z Q. Analysis and Control of Boolean Networks: A Semi-tensor Product Approach [M]. London: Springer, 2011. 19–53.
- [14] BU H, TAO R, BAI X, ZHAO J. Regularized smoothed ℓ_0 norm algorithm and its application to CS-based radar imaging [J]. *Signal Processing*, 2016, 122(C): 115–122.
- [15] ZHANG C, SONG S, WEN X, YAO L, et al. Improved sparse decomposition based on a smoothed L0 norm using a Laplacian kernel to select features from fMRI data [J]. *Journal of Neuroscience Methods*, 2015, 245: 15–24.
- [16] 程晓良, 郑璇, 韩渭敏. 求解欠定线性方程组稀疏解的算法[J]. *高校应用数学学报*, 2013, 28(2): 235–248.
CHENG X L, ZHENG X, HAN W M. Algorithms on the sparse solution of under-determined linear systems [J]. *Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities*, 2013, 28(2): 235–248. (in Chinese)
- [17] ZHANG S, ZHU Y, DONG G, et al. Truncated SVD-based compressive sensing for downward-looking three-dimensional SAR imaging with uniform/nonuniform linear array [J]. *Geoscience & Remote Sensing Letters IEEE*, 2015, 12(9): 1–5.
- [18] Barr S. Medical image samples [OL]. <http://www.barre.nom.fr/medical/samples>, 2016-11-10.
- [19] WANG Z, Bovik A C, Sheikh H R, Simoncelli, E P. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2004, 13(4): 600–612.

作者简介



王金铭 男. 1978 年 10 月出生, 浙江富阳人. 2005 年于浙江大学获硕士学位. 副教授. 主要从事非线性信息处理、图像处理、压缩感知等方面的研究工作.

E-mail: wjm7878@163.com



叶时平 男. 1967 年 1 月出生, 浙江丽水人. 浙江树人大学教授. 主要从事图像处理、智能系统、地理信息系统等方面的研究工作.

E-mail: zjsruysp@163.com